

# 复合材料层板屈曲开裂非线性失效准则

纪竹盛<sup>1</sup>, 刘福江<sup>2</sup>

(1 渤海船舶重工有限责任公司, 辽宁 125004; 2 清华大学力学工程系, 北京 100084)

**摘要:** 本文在虚裂纹逐步闭合法实现能量释放率分量分离的基础上, 提出了一种新型的适用于脆性基体复合材料或  $G_c$  不超过  $G_{lc}$  的韧性基体复合材料的失效准则, 可以用于解决含分层复合材料层合结构的分层扩展问题。实例分析中计算结果与试验数据吻合较好。

**关键词:** 复合材料; 应变 - 能量释放率; 虚裂纹闭合法; 失效准则

**中图分类号:** TQ050.4<sup>+</sup>3 U668.5 **文献标识码:** A

## 1 前言

近年来复合材料在船舶工业领域里得到越来越多的应用, 而且应用范围从次受力结构发展到主受力结构, 由于材料的特殊性(脆性、各向异性、层状等)决定了复合材料的破坏机理和形式与均质各向同性材料有很大区别<sup>[1]</sup>。

含分层的复合材料结构的强度和刚度大大下降, 在一定外载条件下, 分层区域可能出现局部屈曲和分层扩展。因此, 失效准则(本文主要讨论分层扩展起始条件)是人们研究的重要课题。分层扩展依赖于裂纹尖端的应力状态, 受应力强度因子或应变能释放率控制, 由于复合材料裂纹尖端往往出现很复杂的应力场, 在研究分层扩展时, 企图直接求得裂纹尖端的应力强度因子较为困难, 而应变能释放率则相对容易处理, 且物理意义明显。

在理想弹性状态下, 裂纹的扩展是能量的一种不安定现象, 如果裂纹扩展所释放出的能量足以提供其扩展所需要的能量, 裂纹就扩展, 即在与外界无能量交换的条件下, 由于裂纹扩展, 系统释放出的能量实际上是裂纹扩展的驱动力, 当释放出的能量大于或等于材料表面能量, 裂纹开始扩展, 裂纹扩展单位面积所释放的能量定义为能量释放率。

与失稳有关的分层扩展过程是复合型断裂, 通过能量释放率建立失效准则的关键问题是准确计算能量释放率及其分量。

## 2 能量释放率计算

假设裂纹有长度为  $a$  的扩展, 扩展前的状态为 (a), 扩展后的状态为 (b), 则这两种状态应变能之差, 等于裂纹由状态 (b) 闭合到状态 (a) 时所需要的外力功, 其中外力为裂纹前缘应力。Whitcomb<sup>[2]</sup> 基于上述定义提出了虚裂纹闭合法, 即认为分层边缘一点总能量释放率等于闭合该点单位面积所需要的外力功, 因此对一般的曲线边界, 能量释放率表达式可以写为如下 (1) 式, 其中 B、C 代表上下子层, A 代表母板, 将 B、C 两个子层从虚拟扩展到  $a$  后的应变状态闭合到母板 A 在裂纹开裂前的应变状态, B、C 子层在该点闭合前后应变能之差的和便是该点总的能量释放率。

$$G = \frac{1}{2} [NM]^T [K] = \frac{1}{2} [NM]^{iT} [K]^{iT} \quad (1)$$

收稿日期: 2003-01-03

作者简介: 纪竹盛(1941-), 男, 渤海船舶重工有限责任公司研究员。

式中:

$$[K]^T = [ \begin{matrix} i \\ i \\ i \\ i \end{matrix} , \begin{matrix} i \\ n \\ n \\ n \end{matrix} , \begin{matrix} i \\ i \\ i \\ i \end{matrix} , K^i , K_n^i , K_n^i ]^T \quad (2)$$

$$[NM]^T = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} [ \begin{matrix} i \\ i \\ i \\ i \end{matrix} ]^T \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} i &= \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_A}{\partial t} \right)^2 \\ n &= \frac{\partial v_n^i}{\partial n} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_i}{\partial n} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_A}{\partial n} \right)^2 \\ i_n &= \frac{\partial v_n^i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial n} + \frac{\partial w_i}{\partial n} \frac{\partial w_A}{\partial t} + \frac{\partial w_A}{\partial n} \frac{\partial w_i}{\partial t} \\ K^i &= \frac{\partial^2 w^i}{\partial t^2} \\ K_n^i &= - \frac{\partial^2 w^i}{\partial n^2} \\ K_n^i &= - 2 \frac{\partial^2 w^i}{\partial t \partial n} \end{aligned} \right. \quad (4)$$

$$[K]^T = [ \begin{matrix} i \\ i \\ i \\ i \end{matrix} , \begin{matrix} i \\ n \\ n \\ n \end{matrix} , \begin{matrix} i \\ i \\ i \\ i \end{matrix} , K^i , K_n^i , K_n^i ]^T \quad (5)$$

由于分层扩展之前的边界有  $w_A = 0$ , 于是, 可根据(5)式把(2)式写成:

$$[K]^T = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial v_n^i}{\partial n} \\ \frac{\partial u_i}{\partial n} \\ 0 \\ - \frac{\partial^2 w^i}{\partial n^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

(6)式中三个不等于零的分量的物理意义很明显, 它们恰好对应于分层边界点处 II、III、I型断裂问题的广义应变分量。但是, 由于耦合作用, 在虚裂纹闭合法闭合裂纹时, 使三个应变分量之一趋于零会引起另两个分量的变化, 因此, 不能直接从(1)式中分离出 I、II、III型能量释放率分量的封闭表达式。

下面阐述数值分离能量释放率的虚裂纹逐步闭合法 (Virtual Crack Closure Technique Step by Step, 缩写 VCCTS) [3,4]。设逐步闭合虚裂纹按  $N$  次完成。当  $N$  充分大时, 每步闭合

$\frac{\partial v_n^i}{\partial n}/N, \frac{\partial u_i}{\partial n}/N, - \frac{\partial^2 w^i}{\partial n^2}$

$/N$ , 由此引起的耦合变形可以忽略不计, 于是可以分别闭合  $\frac{\partial v_n^i}{\partial n}/N, \frac{\partial u_i}{\partial n}/N, - \frac{\partial^2 w^i}{\partial n^2}/N$ , 第  $J$  步闭合

时, 能量释放率三个分量为

$$G_{Ij}^i = [NM]_j^{iT} \left[ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ - \frac{\partial^2 w^i}{\partial n^2}/N \ 0 \right]^T \quad i = B, C \ j = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

$$G_{IIj}^i = [NM]_j^{iT} \left[ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ - \frac{\partial v_n^i}{\partial n}/N \ 0 \right]^T \quad i = B, C \ j = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

$$G_{IIIj}^i = [NM]_j^{iT} \left[ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{\partial u_i}{\partial n}/N \ 0 \ 0 \right]^T \quad i = B, C \ j = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

所以得到:

$$G_I = \sum_{i=B,C}^N \sum_{j=1}^N G_{Ij}^i \quad G_{II} = \sum_{i=B,C}^N \sum_{j=1}^N G_{IIj}^i \quad G_{III} = \sum_{i=B,C}^N \sum_{j=1}^N G_{IIIj}^i \quad (10)$$

逐步闭合法适用于物理线性和非线性问题, 能量释放率的成功分离使失效准则的建立成为可能。

### 3 失效准则

在外载作用下的分层扩展依赖于裂纹尖端的应力状态, 分层起始是由于能量释放率达到临界值引起的, 因此, 一般来说, 失效准则应为:

$$G = G_c \quad (i = I, II, III) \quad (11)$$

由于拉弯耦合的存在, 通常遇到的都是复合型层间断裂, 能量释放率  $G_I, G_{II}, G_{III}$  都存在, 对分层扩展都有贡献, 于是失效准则的一般形式是:

$$\left( \frac{G_I}{G_c} \right) + \left( \frac{G_{II}}{G_{IIc}} \right) + \left( \frac{G_{III}}{G_{IIIc}} \right) = 1 \quad (12)$$

其中, 参数  $\alpha, \beta$ , 反映 I、II、III 型能量释放率分量对层板分层开裂的贡献的大小。在面内剪切变形较小, 分层远离边缘的情况下,  $G_{III}$  较小, 故第三项一般不予考虑。(12) 式可简化为:

$$\left( \frac{G_I}{G_c} \right) + \left( \frac{G_{II}}{G_{IIc}} \right) = 1 \quad (13)$$

无量纲参数  $\alpha, \beta$ , 难以确定, 试验结果认为  $\alpha$  的范围在 0.5 到 1 之间,  $\beta$  的范围在 1 到 2 之间<sup>[4-6]</sup>, 工程上对脆性基体采用如下线性准则:

$$\frac{G_I}{G_c} + \frac{G_{II}}{G_{IIc}} = 1 \quad (14)$$

线性准则中  $G_I, G_{II}$  同阶, 对分层扩展的贡献是同阶的, 这不符合实际情况, 因为对大多数碳/环氧复合材料来说  $G_c$  远小于  $G_{IIc}$ , I 型开裂对分展扩展的贡献更大一些, 线性断裂准则没有反映出这种趋势。对韧性基体的复合材料, 则有:

$$G_c \ll G_{IIc} \quad (15)$$

于是(14)式化为:

$$G_I + G_{II} = G = G_c \quad (16)$$

这是个适用于韧性基体复合材料的一个近似准则, 在难以计算  $G_I$  与  $G_{II}$  ( $G$  的计算相对容易些) 时测量  $G_c$  即可判断是否有分层扩展发生。(16) 式不适用于脆性基体, 当  $G_{IIIc}$  较小时, 可能偏危险。本文为此提出新的准则, 令:

$$g = G_c / G_{IIc} \quad (17)$$

对脆性基体,  $g$  一般小于 0.5, 对韧性基体  $g$  接近 1<sup>[4]</sup>。参数  $\alpha, \beta$ , 应该是无量纲量  $g$  的函数, 理想的失效准则应该反映以下几点:

- (1)  $G_I$  对分层开裂的贡献应大于  $G_{II}$  即  $\alpha$  应该小于  $\beta$ ;
- (2) 随  $g$  的下降,  $\alpha$  应下降,  $\beta$  应上升;
- (3) 参数  $\alpha$  不该无限小, 参数  $\beta$  不能无限大。

本文认为下面的失效准则比较合理:

$$\left( \frac{G_I}{G_c} \right)^{\frac{1}{2-g}} + \left( \frac{G_{II}}{G_{IIc}} \right)^{\frac{2}{1+g}} = 1 \quad (18)$$

准则 (18) 式基本反映了上述三点,即对脆性基体  $g$  小于 0.5,参数  $\gamma$  的取值范围与实验数据相吻合,对韧性基体  $g$  接近于 1,(18) 式与 (15)、(14) 式基本一致了。

4 算例比较

取铺层次序为 [45/ 90/ - 45/ 0/ 45/ 90/ 45/ - 45/ 0/ 90/ - 45/ 0/ 90/ 45/ - 45/ 0/ 45]<sub>s</sub> 的层合板,单层厚 0.12mm,试件长 240mm,宽 240mm,0° 沿长度方向,材料为 T300/ QY8911,主要物理参数如下:

$E_{1t} = 135 \text{ GPa}$  $E_{2t} = 8.8 \text{ GPa}$  $E_{1c} = 126 \text{ GPa}$

$E_{2c} = 10.8 \text{ GPa}$  $X_t = 1548 \text{ MPa}$  $Y_t = 55.5 \text{ MPa}$

$X_c = 1226 \text{ MPa}$  $Y_c = 218 \text{ MPa}$  $\nu_1 = 0.33$

$G_{12} = 4.47 \text{ GPa}$  $S = 89.9 \text{ MPa}$  $G_{1c} = 252.08 \text{ J/m}^2$

$G_{1c} = 665.46 \text{ J/m}^2$

面内单向受压试验数据、非线性准则 (18) 式及线性准则比较如下表,可以看出本文给出的失效准则与试验数据吻合很好,相对偏保守(安全)。与线性准则比较,本文的结果更接近于试验值,对脆性基体复合材料或  $G_{1c}$  小于  $G_{1c}$  的韧性基体复合材料结构在面内剪切变形较小的情况下,使用本文的准则可以得到较理想的结果。

表 1 面内单向受压试验数据、非线性准则及线性准则比较

Tab. 1 Comparison among test data, nonlinear and linear criterions

		试验数据		本文失效准则		线性准则	
分层尺寸	位 置	分层扩展 应 力 (MPa)	分层扩展 应 变 ( $\times 10^{-6}$ )	分层扩展 应 力 (MPa)	分层扩展 应 变 ( $\times 10^{-6}$ )	分层扩展 应 力 (MPa)	分层扩展 应 变 ( $\times 10^{-6}$ )
= 25	4 ~ 5	327.4	6246	309.2	5972	289.4	5632
= 25	8 ~ 9	365.4	7023	324.9	6892	312.7	6544
= 38	11 ~ 12	422.1	8097	403.4	7976	391.5	7708
= 50	4 ~ 5	256.3	5186	250.6	4987	239.0	4713

参 考 文 献:

[1] 李顺林等. 复合材料的分层破坏问题[A]. 复合材料及其结构的力学进展[M], 广州: 华南理工大学出版社,1991. 183.

[2] Whitcomb J D. Strain - energy release rate analysis of plates with postbuckled delamination[J]. J. Composite Materials, 1989, 23: 714.

[3] Liu FJ, Liu X H. Strain - energy release rate analysis of mixed - mode postbuckled delamination of composite laminates[A]. Proceedings of Thrid, China - Russia - Ukraine Symposium on Astronautical Science and Technology[C], 1994. 949.

[4] Carg A C. Delamination damage mode in composite stuctures[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1989, 29(5) : 703.

[5] 段大鸣. 复合材料层板分层屈曲断裂的理论研究[D]. 硕士学位论文, 西安: 西北工业大学, 1990.

[6] 刘福江. 含损伤复合材料结构非线性失效准则[R]. 清华大学博士后出站报告, 1999.

## Nonlinear Failure Criterion of Composite Laminate

Ji Zhu - sheng<sup>1</sup>, Liu Fu - jiang<sup>2</sup>

(1 Bohai Shipbuilding Heavy Industry Co. Ltd, Liaoning 125004, China;

2 Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract :** The growth of an elliptic delamination due to local buckling and postbuckling is investigated with large deflection theory of plate and fracture mechanics. Delamination growth is assumed to be governed by the strain energy release rates. Based on Virtual Crack Closure Technique (VCCT) of plate theory, a new technique is developed for the first time in this paper, which is suitable for both physical linear and nonlinear problems, can be used to calculate  $G_I$  and  $G_{II}$  digitally to any accuracy with a computer. A nonlinear failure criterion is obtained, It is in good agreement with the experiment data.

**Key words :** composite laminate ; strain - energy release rate ; Virtual Crack Closure Technique (VCCT) ; failure criterion

www.cnki.net