

# 复合材料箱型结构的屈曲性态研究\*

朱菊芬 初晓婷

(大连理工大学工程力学系, 大连, 116023)

**摘要** 采用带旋转自由度参数  $C^0$  类板(壳)单元, 研究复合材料箱型结构的初始屈曲性态。在推导单元几何刚度阵时, 同时考虑出平面位移和面内位移对膜应变的影响; 着重讨论了不同材料正方形截面梁的长细比与欧拉临界力的关系, 复合材料典型盒段的截面形式和铺设角、铺设次序对初始屈曲性态的影响。

**关键词** 复合材料, 箱型结构, 屈曲, 有限元

## 0 引言

复合材料箱型结构与金属材料的箱型结构一样具有良好的弯曲和扭转性能, 因而成为近代飞机和航天器结构上常见的结构形式。在实际使用中可以发现箱型结构在承受压、弯、剪时, 其中的翼板、腹板等构件很容易产生局部失稳并导致整个结构过早的破坏<sup>[1,2]</sup>。设计箱型结构最重要的是要防止局部失稳的发生, 这方面的研究已受到国内外学者的关注。目前, 对复合材料梁和柱(长细比  $\geq 6$ )的整体屈曲效应<sup>[3,4]</sup>研究比较多, 而对飞机结构中常见的盒段结构(长细比  $\leq 3$ )的屈曲性态研究还不多见。作者采用有限元分析方法, 研究了欧拉临界力对复合材料箱型梁的适用范围; 讨论复合材料盒铺设角和铺层次序对初始屈曲载荷和波形影响, 得出了一些对工程设计有用的结果。

## 1 单元列式

采用带旋转自由度  $C^0$  类任意四边形板壳单元, 该单元是为分析复合材料空间薄壁结构而构造的<sup>[5]</sup>, 它具有如下特点: (1) 无横向剪切闭锁; (2) 引入了面内旋转自由度参数, 可以避免用板单元拟合壳体时可能出现的方程病态; (3) 在几何刚度阵中考虑了由面内位移引起的膜应变项。

### 1.1 几何关系

单元结点的位移向量为

$$\mathbf{q} = \{\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \mathbf{q}_3 \quad \mathbf{q}_4\}^T \quad (1)$$

其中  $\mathbf{q}_i^T = \{u_i \quad v_i \quad w_i \quad \omega_{xi} \quad \omega_{yi} \quad \theta_{zi}\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$  (2)

每个节点含三个线自由度  $u_i, v_i, w_i$ , 两个中面法线转角自由度  $\omega_{xi}, \omega_{yi}$  和一个面内旋转自由度参数  $\theta_{zi}$ 。

根据 Mindlin 板(壳)弯曲理论, 中面变形为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_0 \quad \chi \quad \gamma\}^T = \mathbf{B}\mathbf{q} \quad (3)$$

其中

\* 航空基金(00B01001)资助。

2001-05-14 收到第1稿, 2002-04-01 收到修改稿。

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}_0^T = \{ \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy} \} = \{ u_{,x}, v_{,y}, u_{,y} + v_{,x} \} \\ \boldsymbol{\chi}^T = \{ \chi_x, \chi_y, \chi_{xy} \} = \{ \omega_{x,x}, \omega_{y,y}, \omega_{x,y} + \omega_{y,x} \} \\ \boldsymbol{\gamma}^T = \{ \gamma_x, \gamma_y \} = \{ w_{,x} + \omega_x, w_{,y} + \omega_y \} \end{array} \right. \quad (4)$$

## 1.2 位移插值函数

设单元的位移场由两部分组成

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^0 + \boldsymbol{U}_\theta \quad (5)$$

其中  $\boldsymbol{U}^0$  是用自然坐标表示的双线性协调函数, 可用节点自由度表示为

$$\boldsymbol{U}^0 = (u^0, v^0, w^0, \omega_x^0, \omega_y^0)^T = \sum_{i=1}^4 N_i^0 (u_i, v_i, w_i, \omega_{xi}, \omega_{yi})^T \quad (6)$$

$\boldsymbol{U}_\theta$  是由节点旋转自由度参数  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 确定的高次位移场

$$\boldsymbol{U}_\theta = (u_\theta, v_\theta, 0, 0, 0)^T = \sum_{i=1}^4 (N_{u_i}, N_{v_i}, 0, 0, 0)^T \theta_i \quad (7)$$

式(6)、(7)中各项见文献[5]. 将式(6)、(7)代入(5)即得单元的中面位移函数

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{N} \boldsymbol{q}^e, \quad \boldsymbol{N} = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \quad (8)$$

## 1.3 单元刚度矩阵

按照位移有限元法将式(5)、(6)、(8)代入式(3)可得到

$$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{B}_1 \ \boldsymbol{B}_2 \ \boldsymbol{B}_3 \ \boldsymbol{B}_4] \quad (9)$$

于是单元刚度矩阵

$$\boldsymbol{K}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} J d\zeta d\eta \quad (10)$$

其中  $\boldsymbol{B}$  为几何阵,  $J$  为坐标变换的雅可比行列式值,  $\zeta, \eta$  为中面自然坐标,  $\boldsymbol{D}$  为弹性阵.

## 2 结构的特征方程和单元的几何刚度矩阵

### 2.1 结构的特征方程

用上述带旋转自由度的任意四边形板(壳)单元离散薄壁结构为有限个单元组成的空间集合体, 当结构被作为一个保守的弹性体来考虑时, 假如它在某个临界载荷作用下发生了初始屈曲, 同时产生了微小的弯曲变形, 这一瞬间(屈曲前后)结构都应满足平衡, 于是可得广义特征值方程

$$(\boldsymbol{K} - \lambda \boldsymbol{K}_s) \boldsymbol{q} = 0 \quad (11)$$

式中  $\boldsymbol{K}$  和  $\boldsymbol{K}_s$  分别是结构的总刚度矩阵和几何刚度矩阵,  $\lambda$  和  $\boldsymbol{q}$  分别为结构的初始屈曲特征值和相应的特征向量.

### 2.2 单元的几何刚度矩阵

在几何刚度阵中, 除考虑一般板壳单元中由出平面位移  $w$  引起的膜应变外, 还考虑面内位移  $u, v$  引起的膜应变项, 即

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{01} = \{ u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2, u_{,y}^2 + v_{,y}^2 + w_{,y}^2, 2(u_{,x}u_{,y} + v_{,x}v_{,y} + w_{,x}w_{,y}) \}^T / 2 \quad (12)$$

令

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{01} = \boldsymbol{A} \boldsymbol{\theta} / 2 \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \{ u_{,x}, v_{,x}, w_{,x}, u_{,y}, v_{,y}, w_{,y} \}^T = \boldsymbol{G} \boldsymbol{q} \quad (14)$$

则单元的几何刚度阵为

$$\boldsymbol{K}_s^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \boldsymbol{G}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{G} J d\xi d\eta \quad (15)$$

其中  $\boldsymbol{M}$  为膜力阵.

### 3 数值算例及结果分析

#### 3.1 各向同性材料箱型梁

**例1** 各向同性矩形截面悬臂梁,自由端受均匀轴压力  $P$ ,梁长  $L = 60.0 \text{ cm}$ ,截面尺寸  $a \times b = 8.25\text{cm} \times 6.0 \text{ cm}$ ,材料参数:  $\mu = 0.33$ ,  $E = 4.0E4 \text{ MPa}$ ,  $G = 1.5E4 \text{ MPa}$ ,板厚  $h = 0.75 \text{ cm}$ .采用上述四边形单元,得到的失稳临界载荷  $P_{cr}$  及与 Euler 解的比较见表 1.

表 1 各向同性矩形截面梁失稳临界载荷值

Euler 解	有限元解	
	不考虑膜位移影响	考虑膜位移影响
$P_{cr}/N$	3.810E3	6.340E3
误差/%	-	39.91
		2.34

注: 误差是相对于 Euler 解而言.

可见用于空间薄壁结构屈曲分析的板(壳)单元,在单元几何刚度阵中考虑面内位移( $u, v$ )膜应变影响的正确、必要性.即在式(12)中包含所有的二次项.

#### 3.2 复合材料正方形截面箱型梁

**例2** 正方形截面悬臂梁,自由端受均匀轴压  $P$ ,梁长  $L$ ,截面尺寸  $b \times b = 6.0\text{cm} \times 6.0 \text{ cm}$ ,板厚  $h = 0.75 \text{ cm}$ .对于各向同性材料,材料参数同例 1 的箱型梁;对于复合材料,单层材料参数为  $E_1 = 1.35E5 \text{ MPa}$ ,  $E_2 = 8.8E3 \text{ MPa}$ ,  $\mu = 0.33$ ,  $G_{12} = 4.5E3 \text{ MPa}$ ,单层厚度  $t = 0.012 \text{ cm}$ ,铺层为  $[45/0/-45/0/45/90/-45/0/45/0]_s$ ,有限元网格划分为  $4 \times 4 \times 60$ .两种材料梁的计算结果与 Euler 理论解的比较分别见图 1 和图 2.

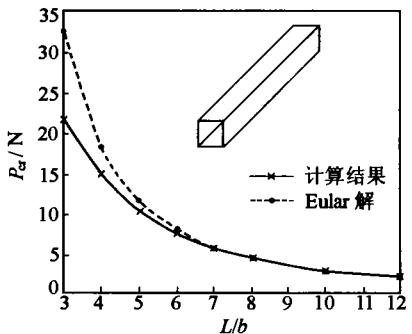


图 1 各向同性材料不同长细比时的临界载荷

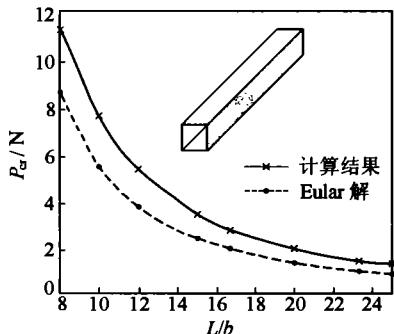


图 2 复合材料不同长细比时的临界载荷

可见,对于各向同性材料箱型梁,当长细比超过  $5 \sim 6$  倍时,基本上为整体 Euler 失稳,其屈曲载荷可按 Euler 临界力公式计算.而层合复合材料箱型梁尽管在一定的长细比情况下也呈现整体失稳,但图 2 中是用结构方向的弯曲刚度求得的 Euler 临界力,没有考虑压剪耦合效应,所以实际屈曲载荷还要高于 Euler 临界载荷.

**例3**  $L/b = 12$  的复合材料箱型梁,  $L = 72 \text{ cm}$ ,  $h = 0.8 \text{ cm}$ ,  $P = 100 \text{ N}$ , 网格为  $3 \times 3 \times 60$ .

图 3 描述了  $L/b = 12$  的复合材料梁在对称及反对称铺设时,铺设角与屈曲特征值之间

的变化关系.可以看出,在总厚度不变的情况下,不论是对称铺设还是反对称铺设,屈曲载荷随着铺设角的增加而增加,在 $45^\circ$ 以后曲线的斜率明显增大, $90^\circ$ 时达到最大值.除了两层对称铺设的情况外,铺层数的变化影响不大,此时结构发生的是整体屈曲.

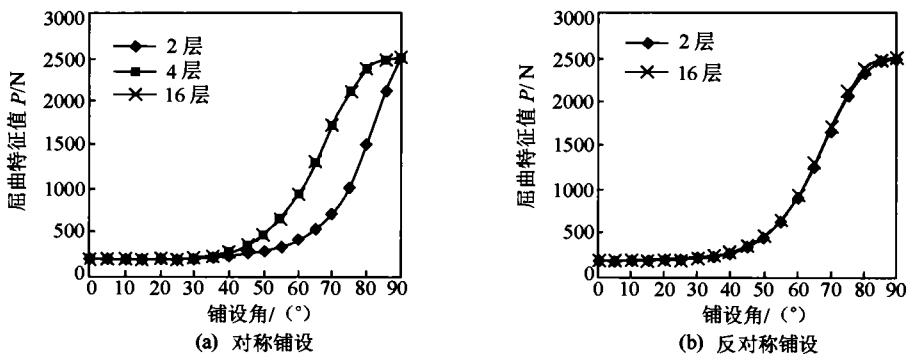


图 3  $L/b = 12$  时, 屈曲特征值随不同铺设角和铺层数的变化

### 3.3 复合材料箱型盒段

**例 4**  $L/b = 1$  的复合材料单闭室盒段, 该盒段在长度方向一端固支, 一端自由.  $L/b = 6.0$  cm,  $h = 0.24$  cm, 自由端受轴压  $P = 100$  N. 网格划分为  $10 \times 10 \times 10$ .

图 4 描述了对称及反对称铺设复合材料梁的铺角与屈曲载荷之间的关系.可以看出,在总厚度不变的情况下,不论是对称铺设还是反对称铺设,屈曲载荷都随着铺层数的增加而增加.除了两层铺设之外,图中屈曲载荷是逐渐上升的,直到 $45^\circ$ 附近后开始下降;而两层铺设的曲线变化明显不同,对称铺设时在 $70^\circ$ 附近达到最大值,而反对称铺设时在 $45^\circ$ 附近达到最大值.由于反对称铺设时,拉扭耦合项( $B_{16}$  和  $B_{26}$ )的影响,其屈曲特征值大于对称铺设的情况,随着铺层数的增加,其耦合项的影响减弱.另外,由于  $E_1/E_2$  较大,所以 $90^\circ$ 铺设的屈曲特征值较 $0^\circ$ 时的屈曲载荷大,因为 $90^\circ$ 时纤维方向与载荷方向一致.图 5 给出了 $0^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $45^\circ$ 单向铺设盒段在长度( $y$ )和宽度( $x$ )方向上的屈曲模态.可见 $0^\circ$ 和 $90^\circ$ 铺设时的屈曲半波数分别为 $2/1$  和  $1/1$ ,且两对边波形对称;而 $45^\circ$ 铺设时的半波数为 $1/1$ ,且两对边波形不对称.

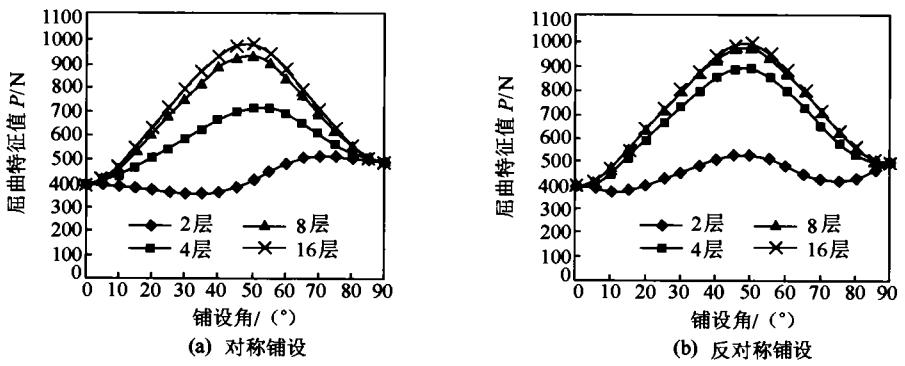


图 4  $L/b = 1$  时, 屈曲载荷随不同铺设角和铺层数的变化

**例 5** 复合材料三闭室盒段, 盒段在长度方向一端固支, 一端自由. 几何尺寸  $L \times a \times b = 100\text{cm} \times 10\text{cm} \times 60\text{ cm}$ , 材料参数  $E_1 = 1.35\text{E}5$  MPa,  $E_2 = 8.8\text{E}3$  MPa,  $\nu = 0.33$ ,  $G_{12} = 4.5\text{E}3$

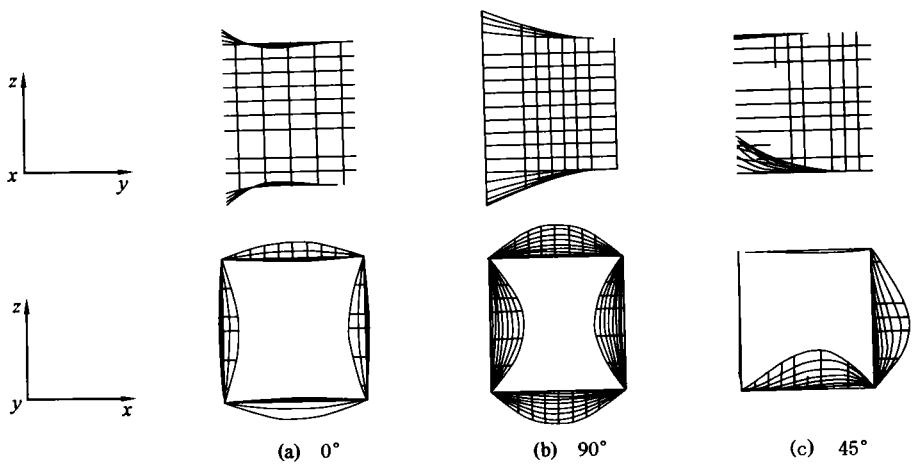


图 5 不同单向铺设角盒段的屈曲模态

MPa. 自由端受轴压作用  $P = 1 \text{ N/cm}$ . 网格划分如图 6 所示. 图 7 给出了随铺设角、铺层数变化的屈曲载荷值, 其变化规律与图 4 基本相同. 不同铺设角下的屈曲模态见图 8.

可见, 当给定截面几何形状和翼板、腹板厚度情况下, 改变铺角和铺层数次序可以改变盒段屈曲模态和屈曲载荷, 而且由于铺角的影响使得几何和载荷对称的结构也可以出现不对称屈曲波形.

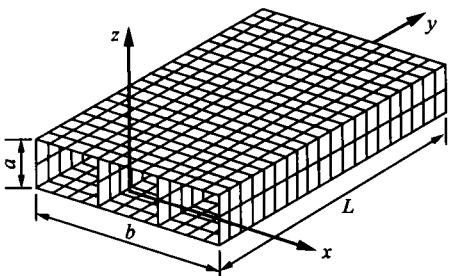


图 6 三闭室多墙结构

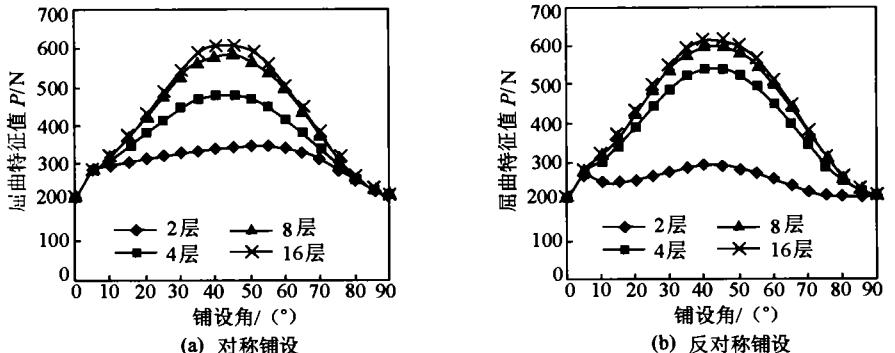


图 7 三闭室多墙结构变化铺设角、铺层数时的屈曲特征值

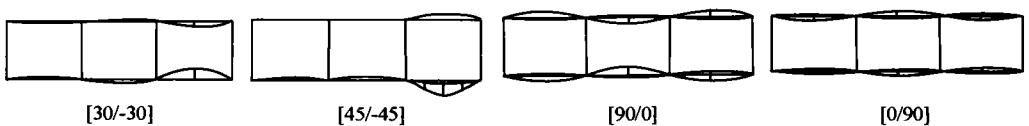


图 8 各种铺设角下的失稳模态

#### 4 结论

(1) 对于薄壁空间结构的屈曲分析,在几何刚度阵中除考虑由出平面位移引起的膜应变外还必须考虑面内位移引起的膜应变项.

(2) 轴压作用下的复合材料箱型梁,随着长细比的增大,屈曲临界载荷也逐渐增大,屈曲模态由局部向整体屈曲过渡;在发生局部屈曲时,无论是对称铺设还是反对称铺设,当铺设角为45°附近达到最大值(除两层铺设外);在发生整体屈曲时,随着铺设角度的增大,屈曲临界载荷也逐渐增大,当铺设角为90°时(即纤维与载荷同向)达到最大值.

(3) 轴压作用下无论是箱型梁还是盒段结构,在板厚一定的情况下,随着铺层数的增加,屈曲载荷增大;对单闭室或三闭室复合材料盒段,铺层数及铺设角等各种因素对屈曲载荷的影响基本相同.

#### 参 考 文 献

- 1 Thimmhardy E G, Hoa S V. Numerical investigation of ultimate strength of composite box beams, In: Srinivasa L I, Rajan S, editors. Proceedings of the specialty conference. American Society of Civil Engineers, 1991, 405~415
- 2 Meyer-Piening H R, Anderegg R. Buckling and postbuckling investigations of imperfect curved stringer-stiffened composite shells, Part A: Experimental investigation and effective width evaluation. *Thin-Walled Struct*, 1995, 23: 323~350
- 3 Gan Lianhong, Ye Lin, Mai Yinwing. Optimum design of cross-sectional profils of pultruded box beams with high ultimate strength. *Composite Structures*, 1999, 45: 279~288
- 4 Romano G, Rosti L, Ferro G. Shear deformability of thin-walled beams with arbitrary cross sections. *Int J Numer Meth Eng*, 1992, 35(2): 283~306
- 5 朱菊芬, 郑罡. 带旋转自由度  $C^0$  类任意四边形板(壳)单元. *计算力学学报*, 2000, 17(3): 287~292

## BUCKLING BEHAVIOUR INVESTIGATION OF COMPOSITE BOX-LIKE STRUCTURES

Zhu Jufen Chu Xiaoting

(Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian, 110023)

**Abstract** Buckling behaviour of composite box-like structures is researched by using the arbitrary quadrangular plate (shell) element possessing rotation degree of freedom. The influence of in-plane and out-plane displacement on the membrane strain should be considered to form the geometrical stiffness of element. Computational investigations of buckling behaviour of beams and box-like structures employing the finite element method are presented, and the influence of  $L/b$ , laminate ply angle, order and section-form on buckling behaviour is discussed.

**Key words** composite material, box-like structure, buckling, finite element method