

# 玻璃钢/橡胶夹层复合材料弯曲性能计算与实验

石 勇, 朱 锡, 毛 亮, 李永清

(海军工程大学船舶与海洋工程系, 武汉 430033)

**摘 要:** 对玻璃钢/橡胶夹层梁结构在横向载荷作用下的力学特性进行分析, 利用弯曲变形时夹层梁各层内和层间力的平衡方程和变形协调方程, 得到以层间剪力为变量的二阶微分方程式, 并利用边界条件进行求解, 从而提出了更为准确的夹层梁弯曲应力和挠度的解析表达式。通过与夹层悬臂梁的弯曲实验测量结果比较, 弯曲应力和挠度的相对计算误差小于10%。

**关键词:** 夹层梁; 弯曲; 解析方法; 复合材料

**中图分类号:** TU 502

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1671-4431(2007)02-0054-04

## Calculation and Experimental Research on Bending Performance of Glass Fiber Reinforced Plastics/Rubber Sandwich Beams

SHI Yong, ZHU Xi, MAO Liang, LI Yong-qing

(Department of Naval Architecture & Ocean Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China)

**Abstract:** The mechanical characteristics of glass fiber reinforced plastics/rubber sandwich beams were analyzed when the sandwich beam was subjected to transverse load. In terms of simultaneous equations of relation of deformations between different layers and force balance in surface layers, quadratic differential equation with shear stress in middle layer as variable was got and solved by boundary conditions. Consequently the more accurate analytical expresses of bending stress and displacement were presented for sandwich beams. By comparing analytical solutions with the measuring results of the bending test of cantilever sandwich beams, the error of the analytical solutions was less than 10%.

**Key words:** sandwich beams; bending; analytical method; composite material

玻璃钢/橡胶复合材料夹层结构由外层板和夹芯2部分组成, 外层为玻璃纤维增强复合材料, 夹芯是隔声或吸声橡胶材料。由于这种结构既可以承载, 又具有隔声、吸声等功能, 已越来越多地应用于声隐身结构中<sup>[1]</sup>。因而正确地计算分析其力学性能, 对设计夹层结构强度和刚度是十分必要的。

软夹芯的夹层梁弯曲变形不符合平断面假设, 较普通均质梁复杂得多, 简单假设条件下的计算结果出入很大, 而利用高阶夹层理论<sup>[2,3]</sup>, 通过数值计算进行求解, 精度很高但它得不到直观的解析公式, 工程应用不便。目前用得较多的是计及夹芯剪切变形的夹层梁弯曲理论<sup>[4-7]</sup>, 这种方法是通过挠度变形假设, 利用平衡方程和几何方程进行求解, 虽然精度较简单假设的计算方法有较大提高, 但通过与实验结果的比较误差还是要大于20%<sup>[8]</sup>。综上所述, 目前对于夹层梁弯曲变形的解析计算精度有待提高, 且缺乏实验的验证。作者针对玻璃钢/橡胶夹层梁结构, 推导更为准确的弯曲应力和挠度的解析表达式, 并且对夹层梁进行弯曲实验, 进一步验证解析算法的准确性。

### 1 夹层梁弯曲的弹性力学分析

研究对象为夹层等截面直梁, 夹芯的强度相对表层较低, 夹层梁表层的厚度为  $t$ , 夹芯的厚度为  $h$ 。当

收稿日期: 2006-09-28.

作者简介: 石 勇(1977-), 男, 博士生. E-mail: shiyong\_sea@163.com

受到横向载荷作用时,除了要考虑剪力、弯矩以外,还要考虑层间的剪切力和轴向的拉力作用,对夹层梁单元进行受力分析,其内力分布如图1所示。夹层梁截面总的弯矩为  $M$ ,总的剪力为  $Q$ ,则

$$M = 2M_1 + T(h+t) \quad Q = 2Q_1 + Q_c$$

夹层梁下层微元受力分析如图2所示,由夹层梁的微单元在  $x$  轴方向的力平衡和  $xy$  平面内的转动力矩平衡得到

$$dT/dx = \pm a\tau \quad (1)$$

$$dM_1/dx = \frac{1}{2}a\tau(h+t) - Q_1 \quad (2)$$

式中,  $a$  为梁的宽度;  $+$  表示上层,  $-$  表示下层。

由式(2)可以看出,不同于均质梁,夹层梁的弯矩不仅与横向剪力有关,还与层间的剪切力有关。

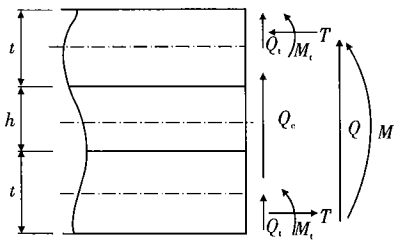


图1 夹层梁截面内力分布

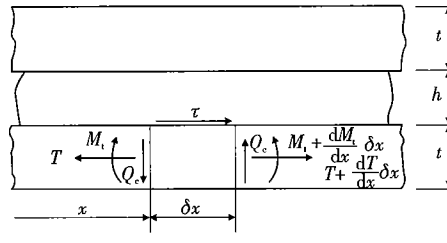


图2 夹层梁下层微元受力分析

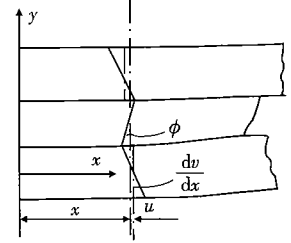


图3 夹层梁层间变形协调关系

夹层梁上下表层受到弯矩和轴向力作用,  $u$ 、 $v$  分别表示轴向的位移和横向的位移,应用经典的 Euler-Bernoulli 梁理论来分析,则表层内应力、应变关系为

$$E_1 \frac{du}{dx} = \frac{T}{t} \quad \frac{aE_1 t^3}{12} \frac{d^2 v}{dx^2} = M_1$$

因为中间夹芯的弹性模量较低,夹层梁弯曲时,每层结构都有一个中性层,上、下两层发生相对的滑移,如图3所示。中间夹层由于面内剪切力的作用,发生剪切变形,依据上、下表层与中间夹层的变形协调关系,在小变形的条件下剪切变形的角度为

$$\phi = \left[ \frac{dv}{dx}(h+t) - 2u \right] / h \quad (3)$$

$$\text{则层间剪切应力为} \quad \tau = G\phi = \frac{G}{h} \left[ (h+t) \frac{dv}{dx} - 2u \right] \quad (4)$$

对式(4)微分2次,并将式(3)代入,得到

$$\frac{d^2 \tau}{dx^2} - \frac{2G}{E_1 h t^3} [3(h+t)^2 + t^2] \tau = - \frac{12G(h+t)}{a E_1 h t^3} Q_1$$

解微分方程得到层间剪切应力的表达式

$$\tau = A \operatorname{sh}(mx) + B \operatorname{ch}(mx) + \frac{6(h+t)}{a [3(h+t)^2 + t^2]} Q_1 \quad (5)$$

式中,  $m^2 = \frac{2G}{E_1 h t^3} [3(h+t)^2 + t^2]$ ;  $A$ 、 $B$  为待定系数。

将边界条件代入式(1)、式(2)、式(5)可求出层间剪应力、轴向力和弯矩,进而求得夹层梁的弯曲正应力、剪应力和挠度。

## 2 夹层梁弯曲应力和挠度的计算

### 2.1 弯曲应力计算

假设夹层梁一端刚性固定,另一端自由,自由端受到集中力的作用,如图4所示。下面推导夹层梁弯曲应力和挠度的表达式。

左边界条件为刚性固定,则  $x=0$ ,  $\tau=0$ ; 右边界条件为自由,则  $x=L$ ,  $M=T=0$ , 于是有  $d\tau/dx=0$ , 通过上述边界条件,可直接求出上下表面的层间剪应力

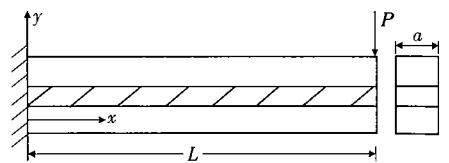


图4 夹层梁的力学模型

$$\tau = \frac{3(h+t)P}{a [3(h+t)^2 + t^2]} [\operatorname{th}(mL) \operatorname{sh}(mx) - \operatorname{ch}(mx) + 1] \quad (6)$$

由式(1)、式(2)解得轴向力和弯矩为

$$T = \pm \frac{3(h+t)P}{3(h+t)^2 + t^2} \left[ \left( -\frac{\text{sh}(mx)}{m} + \frac{\text{th}(mL)}{m} \text{ch}(mx) \right) - (L-x) \right]$$

$$M_t = \frac{1.5(h+t)^2 P}{3(h+t)^2 + t^2} \left[ \left( -\frac{\text{sh}(mx)}{m} + \frac{\text{th}(mL)}{m} \text{ch}(mx) \right) + \frac{t^2(L-x)}{3(h+t)^2} \right]$$

则表面层内的正应力为(“-”为上表层;“+”为下表层)。

$$\sigma_{xx} = \frac{T}{at} - \frac{12M_t y}{at^3} = \frac{3(h+t)P}{at[3(h+t)^2 + t^2]} \left[ \left( \frac{\text{sh}(mx)}{m} - \frac{\text{th}(mL)}{m} \text{ch}(mx) \right) (\mp 1 + \frac{6(h+t)}{t^2} y) + (L-x) (\mp 1 - \frac{2y}{h+t}) \right] \quad (7)$$

将弯矩和轴向力代入总弯矩的表达式,则  $M = 2M_t + T(h+t) = P(L-x)$ ,正好等于梁的弯矩分布,这也验证了上述假设和公式推导的准确性。

## 2.2 弯曲挠度计算

夹层梁的外层复合材料对夹芯具有束缚作用,其弯曲变形挠度可由上下表层的变形表征,而夹芯的剪切变形引起了表层弯曲中性轴的改变,改变了表层弯曲刚度,其影响已隐含于弯矩的表达式中。因为上下表层对称,以下表层为例推导夹层梁的弯曲变形挠度。

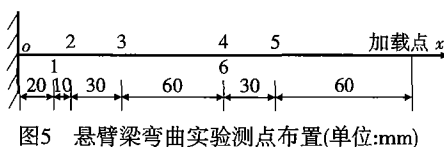
下表层的弯曲变形  $w$  是由弯矩  $M_t$  引起的,而轴向力  $T$  引起的主要是轴向的拉伸变形,则由 Euler-Bernoulli 梁理论可知:  $w'' = \frac{M_t}{at^3/12}$ ; 由边界条件  $x=0, w=w'=0$ , 进一步求得  $w$  的表达式,即

$$w = \frac{18(h+t)^2 P}{E_t at^3 [3(h+t)^2 + t^2]} \left[ \frac{t^2(3Lx^2 - x^3)}{18(h+t)^2} - \frac{\text{sh}(mx)}{m^3} + \frac{\text{th}(mL)}{m^3} \text{ch}(mx) + \frac{1}{m^2} x - \frac{\text{th}(mL)}{m^3} \right] \quad (8)$$

从夹层梁弯曲挠度的表达式可以看出,第1项与普通均质梁不考虑剪切变形时的弯曲变形一致,其余各项则是夹芯对夹层梁弯曲变形的影响。

## 3 夹层梁弯曲性能实验研究

试件尺寸:长 300 mm,宽 60 mm,面层厚 4 mm,夹芯厚 30 mm。面层材料为纤维增强树脂基复合材料(玻璃钢),夹芯为橡胶。玻璃钢的弹性模量为 19 GPa,泊松比为 0.14;橡胶材料的弹性模量为 3 MPa,泊松比为 0.49。梁的一端刚性固定,另一端悬挂质量砝码,测点布置



如图5所示。1—6为6个应变测点,在加载点悬挂质量砝码,2个位移测点分别为110 mm、180 mm。

测量夹层梁表面弯曲应力与载荷的关系,以及夹层梁弯曲挠度与载荷的关系,结果如图6、图7所示。其中梁表面的弯曲应力是通过测量应变,由公式  $\sigma = E\varepsilon$  得到。

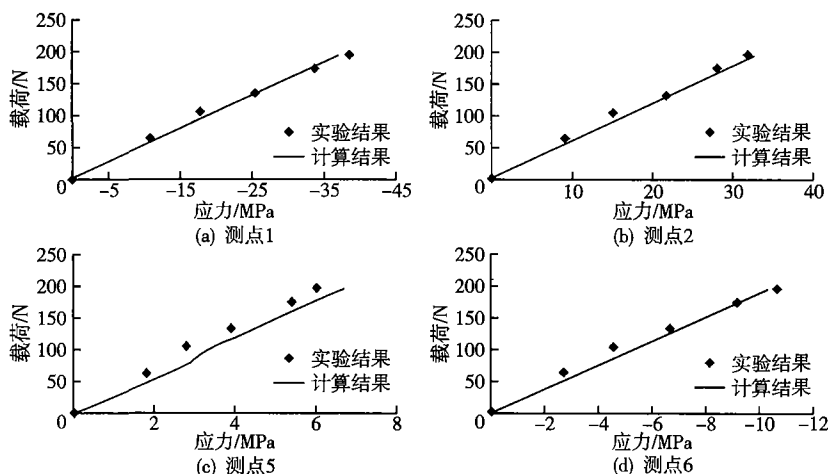


图6 夹层梁载荷-应力曲线

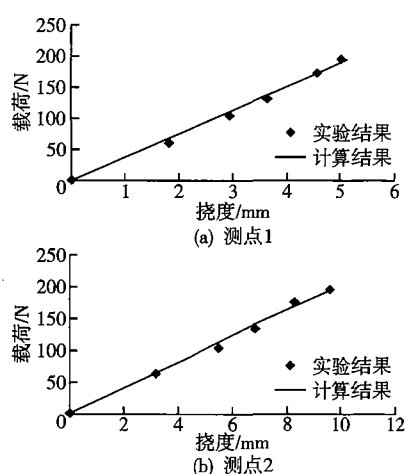


图7 夹层梁载荷-挠度曲线

由图6可见,弯曲正应力的实验结果与计算结果十分吻合,最大相对误差小于10%,其中测点5的实验结果与计算值误差较大,主要是因为集中力载荷在作用点附近引起局部变形,而该点距离载荷作用位置较

近,而理论计算没有考虑集中力引起的局部变形,所以存在较大偏差。

由图7可见,弯曲挠度的实验结果与计算结果也十分吻合,夹层梁的弯曲挠度与载荷基本上是线性关系,随着载荷增加挠度变大,载荷与挠度的比值反映了夹层梁的弯曲刚度。

## 4 结 论

a. 提出的玻璃钢/橡胶复合材料夹层梁弯曲内应力和弯曲挠度的理论计算结果与实验结果十分接近,最大相对误差小于10%,证明此种夹层梁的弯曲应力和挠度的计算分析方法是合理的;

b. 夹层梁弯曲变形不符合平断面假设,夹芯中存在层间剪切变形,起到连接上下表面的作用,夹层梁的弯曲变形挠度主要由表层的弯曲变形决定。

### 参考文献

- [1] Smith, Charles. Composite Structure[P]. USA :pct/gb98/01377, 1998-11-26.
- [2] Swanson Stephen R. An Examination of a Higher Order Theory for Sandwich Beams[J]. Composite Structures, 1999, 44:169-177.
- [3] Swanson S R, Kim J. Comparison of a Higher Order Theory for Sandwich Beams with Finite Element and Elasticity Analyses [J]. J Sandw Struct Mater, 2000, 2(1):33-49.
- [4] 周祝林,杨云娣. 蜂窝夹层梁弯曲理论分析与试验比较 [J]. 玻璃钢/复合材料, 1991, (3):17-32.
- [5] 中科院力学研究所. 夹层板壳的弯曲、稳定和振动[M]. 北京:科学出版社, 1977.
- [6] 周祝林,杨云娣. 泡沫塑料夹层梁弯曲试验和理论分析[J]. 纤维复合材料, 1991, (3):24-34.
- [7] Cuninghame P R, White R G. A New Measurement Technique for the Estimation of Core Shear Strain in Closed Sandwich Structures[J]. Composite Structures, 2001, 51:319-334.
- [8] Sokolinsky V S, Shen H, Vaikhanski L, et al. Experimental and Analytical Study of Nonlinear Bending Response of Sandwich Beams[J]. Compos Struct, 2003, 60:219-229.

(上接第39页)

### 参考文献

- [1] 谢周涛,何再安,刘焱文. 红蓼的化学成分及药理研究进展[J]. 时珍国医国药, 2005, 16(10):1034-1035.
- [2] 中华人民共和国卫生部药典委员会. 中国药典[S]. 北京:人民卫生出版社, 1977.
- [3] 中华人民共和国卫生部药典委员会. 中国药典[S]. 北京:人民卫生出版社, 2005.
- [4] 杨国勋,宋 蕾,李奎莲,等. 红蓼果实化学成分的研究[J]. 中国药学杂志, 2003, 38(5):338-340.
- [5] 俞一心,戈升荣,王桂珍. 槲皮素及其衍生物的药理作用研究进展[J]. 中药材, 2003, 26(12):902.